III. Champ de vecteurs des vitesses d'un solide

II.1. Vecteur de la vitesse d'un point d'un solide.

Le vecteur de la vitesse d'un point M d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ à un instant t, est la dérivée du vecteur de la position $\overrightarrow{OM}(x,\ \text{y, z})$ du point M par rapport au temps, il est noté $\vec{v}(M/\Re)$ son expression est donnée par:

$$\vec{v}(M/\Re)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

II.2. Torseur cinématique- Distribution des vitesses

Soit (S) un solide indéformable en mouvement par rapport à un référentiel $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ et $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ un référentiel lié à (S).

Soient A et B deux point de (S), la dérivée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport $\Re_o\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ à est sous la forme suivante :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re_o}=\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re}+\Omega\left(\Re/\Re_o\right)\wedge\overrightarrow{AB}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant dans le référentiel $\Re\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ lié au solide, alors $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re}=\vec{0}$, ainsi que

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\Re_o}=\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{\Re_o}-\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\Re_o}=\vec{v}(B/\Re_o)-\vec{v}(A/\Re_o)$$

Par suite :

$$\vec{v}(B/\Re_o)-\vec{v}(A/\Re_o)=\Omega\left(\Re/\Re_o\right)\wedge\overrightarrow{AB}$$

Enfin :

$$\vec{v}(B/\Re_o)=\vec{v}(A/\Re_o)+\Omega\left(\Re/\Re_o\right)\wedge\overrightarrow{AB}$$

En basant sur cette formule, le champ des vecteurs de vitesses d'un solide est un champ antisymétrique. Par conséquent, il est représentable par un torseur qui s'appelle le torseur cinématique et noté $[v(S/\Re_o]$ ses éléments de réduction en un point A sont :

$$[v(S/\Re_o]_A = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \\ \vec{v}(A/\Re_o) \end{pmatrix}$$

$\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right)$: La résultante du torseur cinématique qui est le vecteur de rotation de $S/\Re_o$

$\vec{v}(A/\Re_o)$: Le moment du torseur cinématique en point A qui la vitesse de par rapport à $\Re_o$

Si $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \neq \vec{0}$, alors le torseur cinématique présente un axe central qui s'appelle axe instantané de rotation. Cet axe est donc le lieu des points dont les vitesses sont parallèles au vecteur de rotation $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \neq \vec{0}$.

II.2. a. Torseur du mouvement de translation

Soit (S) un solide en mouvement de translation par rapport un référentiel $\Re_o$, alors Le vecteur de rotation de (S) par rapport $\Re_o$ à est nul $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) = \vec{0}$ et les vecteurs vitesses de tous les points de (S) sont égaux.

$$\forall(A \text{ et } B) \in (S) \qquad \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) = \vec{0} \text{ et } \vec{v}\left(A/\Re_o\right) = \vec{v}\left(B/\Re_o\right) = \vec{w}$$

Par conséquent, le torseur cinématique se réduit à un torseur couple $[C] = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$.

Où $\vec{w}$ est le vecteur de la vitesse de translation du solide (S) par rapport au référentiel $\Re_o$.

II. 2. b. Torseur du mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe passant par l'un de ses points

Soit (S) un solide en mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe passant par l'un de ses points A, alors le vecteur de rotation de (S) par rapport à $\Re_o$ n'est pas nul $\vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \neq \vec{0}$ et le vecteur de la vitesse du point A est nul $\vec{v}\left(A/\Re_o\right)$. Dans ces conditions, le torseur cinématiques se réduit en un torseur glisseur dont les éléments de réduction en un point P de (S) sont :

$$[v(S/\Re_o]_P = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \\ \vec{v}(P/\Re_o) \end{pmatrix}$$

Où

$$\forall P \in (S) \qquad \vec{v}(P/\Re_o) = \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right) \wedge \overrightarrow{AP}$$

L'axe instantané de rotation est l'axe $\left(A, \vec{\Omega}\left(S/\Re_o\right)\right)$.

II. Champ de vecteurs de l'accélération d'un solide

Le vecteur de l'accélération d'un point M d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère $\Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ à un instant t, est la dérivée du vecteur de la vitesse $\vec{v}(M/\Re)$ du point M par rapport au temps, aussi est la dérivée seconde du vecteur de la position $\left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re}$, il est noté $\vec{\gamma}(M/\Re)$ son expression est donnée par:

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

On vérifie la propriété d'antisymétrique de champ des accélérations des points de (S), pour cela

Soient A et B du solide (S)

$$\vec{v}(B/\Re) = \vec{v}(A/\Re_o) + \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

On dérive par rapport au temps en obtenant :

$$\vec{\gamma}(B/\Re_o) = \vec{\gamma}(A/\Re_o) + \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\right)_{\Re} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right)_{\Re}$$

D'autre part : $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right)_{\Re} = \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AB}$

Ce qui entraine : $\vec{\gamma}(B/\Re_o) = \vec{\gamma}A/\Re_o) + \frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(S/\Re\right)\right)_{\Re} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AB}$

Le terme $\vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \vec{\Omega}\left(S/\Re\right) \wedge \overrightarrow{AB}$ en général n'est pas nul, alors le champ de vecteurs des accélération n'est pas antisymétrique, par conséquent n'est pas représentable par un torseur.

III. Composition des mouvements

Composition des mouvements permet de connaître le mouvement d'un point M (vitesse, accélération) par rapport à un référentiel $\Re_i$, en connaissant son mouvement par rapport à un référentiel $\Re_j$ lui-même en mouvement par rapport à $\Re_i$.

Soit (S) un solide en mouvement dans deux référentiels l'un absolu $\Re_a\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ et l'autre relatif $\Re_r\left(O',\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ qui est en mouvement par rapport à $\Re_a$.

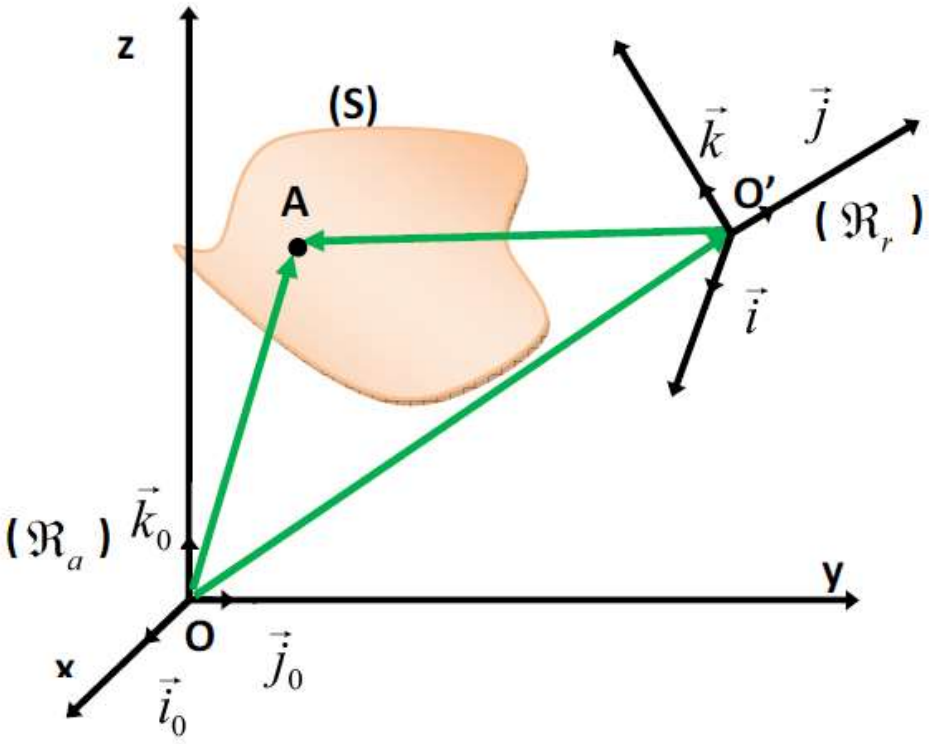

Figure 7 : Composition des mouvements

III.1.Composition des vecteurs de rotation

Le vecteur de rotation $\vec{\Omega}\left(S/\Re_a\right)$ du (S) par rapport à $\Re_a\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ est :

$$\vec{\Omega}\left(S/\Re_a\right)=\vec{\Omega}\left(S/\Re_r\right)+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)$$

En général

Si il y a plusieurs référentiels n, $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \ldots\ldots\ldots, \Re_{n-1}, \Re_n$, le vecteur de rotation de (S) par rapport à $\Re_n$ est :

$$\vec{\Omega}\left(S/\Re_n\right) = \vec{\Omega}\left(S/\Re_1\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\Omega}\left(\Re_i/\Re_{i+1}\right)$$

En outre, $$\vec{\Omega}\left(\Re_i/\Re_{i+1}\right) = -\vec{\Omega}\left(\Re_{i+1}/\Re_i\right)$$

III.2.Composition des vitesses

La vitesse absolue du point A du solide (S) par rapport à $\Re_a\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ est donnée par :

$$\vec{v}_a(A/\Re_a) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{\Re_a}$$

La vitesse relative du point A du solide (S) par rapport à $\Re_r\left(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est donnée par :

$$\vec{v}_r(A/\Re_r) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\Re_r}$$

D'autre part **:** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$ relation de Chasles, alors la vitesse absolue de A devient :

$$\vec{v}_a(A/\Re_a) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\Re_a} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\Re_a}$$

En outre :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\Re_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\Re_r} + \vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

$$= \vec{v}_r(A/\Re_r) + \vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

et

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\Re_a} = \vec{v}(O'/\Re_a)$$

Enfin :

$$\vec{v}_a(A/\Re_a) = \vec{v}(O'/\Re_a) + \vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right) \wedge \overrightarrow{O'A} + \vec{v}_r(A/\Re_r)$$

Donc la vitesse du point A peut-être décomposée en deux parties

La vitesse relative étant la vitesse de A par rapport au référentiel relatif $\Re_r\left(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$son expression est :

$$\vec{v}_r(A) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_{\Re_r}$$

La vitesse d'entrainement du point A étant la vitesse de A par rapport au référentiel $\Re_a\left(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\right)$ en supposant que le point A soit fixe dans le référentiel $\Re_r\left(O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Elle est notée $\vec{v}_e(A)$ son expression est :

$$\vec{v}_e(A/\Re_O) = \vec{v}(O'/\Re_a) + \vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

La vitesse absolue est la somme de la vitesse relative est la vitesse d'entrainement.

$$\vec{v}_a(A) = \vec{v}_e(A) + \vec{v}_r(A)$$

III.3.Composition des accélérations

L'accélération absolue du point A du solide (S) par rapport à $\Re_a\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ est donnée par :

$$\vec{\gamma}_a(A/\Re_a)=\left.\frac{d\vec{v}_a(A/\Re_a)}{dt}\right)_{\Re_a}$$

Ce qui entraine :

$$\vec{\gamma}_a(A)=\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(O'/\Re_a)\right)_{\Re_a}+\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}\right)_{\Re_a}+\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_r(A)\right)_{\Re_a}$$

$$\#\frac{d}{dt}\left(\vec{v}(O'/\Re_a)\right)_{\Re_a}=\vec{\gamma}_a(O'/\Re_a)$$

$$\#\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_r(A)\right)_{\Re_a}=\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_r(A)\right)_{\Re_r}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{v}_r(A)=\vec{\gamma}_r(A)+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{v}_r(A)$$

$$\#\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}\right)_{\Re_a}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}\right)_{\Re_r}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\Big)_{\Re_r}\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{O'A}\right)_{\Re r}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\Big)_{\Re_r}\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{v}_r(A)+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}\right)$$

On remplace dans l'expression de $\vec{\gamma}_a(A)$ en obtenant :

$$\vec{\gamma}_a(A)=\vec{\gamma}_r(A)+\vec{\gamma}_a(O'/\Re_a)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\Big)_{\Re_a}\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}+2\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{v}_r(A)$$

Alors, l'accélération absolue peut être décomposée en trois parties :

L'accélération relative $\vec{\gamma}_r(A)$ étant l'accélération de A à $\Re_r\left(O',\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est donnée par :

$$\vec{\gamma}_r(A)=\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_r(A)\right)_{\Re_r}$$

L'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e(A)$ étant l'accélération de A par rapport au $\Re_a\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ si A est supposé fixe dans $\Re_r\left(O',\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, elle donnée par :

$$\vec{\gamma}_e(A)=\vec{\gamma}_a(O'/\Re_a)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\right)_{\Re_a}\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\overrightarrow{O'A}$$

L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c(A)$ son expression est donnée par :

$$\vec{\gamma}_e(A)=2\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\wedge\vec{v}_r(A)$$

L'accélération de Coriolis est nulle si:

- ✓ Le vecteur de rotation $\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)=\vec{0}$ est nul, signifie que $\Re_r\left(O',\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ en mouvement de translation par rapport à $\Re_a\left(O,\ \vec{i}_0,\ \vec{j}_0,\ \vec{k}_0\right)$ seulement.
- ✓ La vitesse relative de A par rapport à $\Re_r\left(O',\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est nulle $\vec{v}_r(A)=\vec{0}$, A est fixe par rapport à $\Re_r\left(O',\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
- ✓ Le vecteur de rotation $\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)$ et la vitesse $\vec{v}_r(A)$ sont parallèles $\vec{\Omega}\left(\Re_r/\Re_a\right)\|\vec{v}_r(A)$ (colinéaires).

VI. Cinématique des solides en contact

VI.1. Contact ponctuel

Soit $\Re\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un référentiel, et (S_1) et (S_2) deux solides en mouvement par rapport à ce référentiel. Ainsi que (S_1) en mouvement par rapport à (S_2) et leurs surfaces restent en contact ponctuel **figure 8**. Soit **I** le point géométrique de l'espace de contact entre (S_1) et (S_2) à un instant t.

A chaque instant, il faut distinguer trois points confondus dont les vitesses et les accélérations sont différentes en général :

Le point matériel I_1 lié au solide (S_1), $I_1 \in (S_1)$.

Le point matériel I_2 lié au solide (S_2), $I_1 \in (S_2)$.

le point géométrique I qui n'appartient ni à (S_1) et ni à (S_2), $I \notin (S_1)$ et $I \notin (S_2)$.

Au cours du temps, le point I est confondu avec les différents points matériels de contact entre (S1) et (S2).

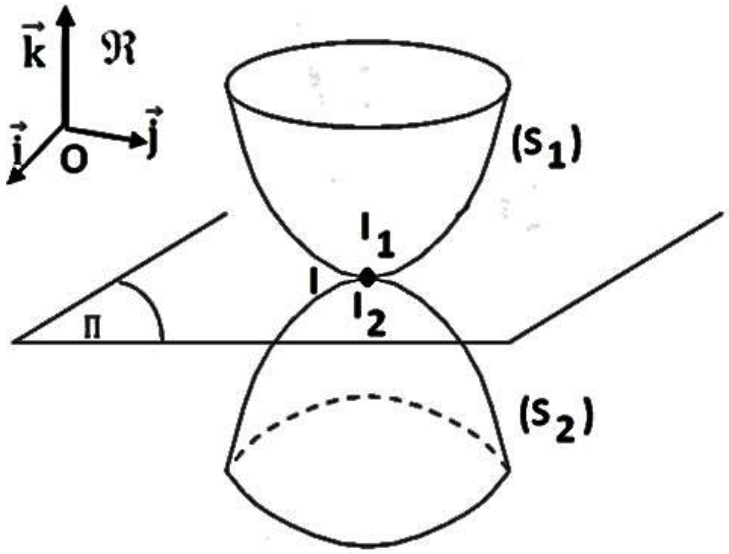

Figure 8 : le contact ponctuel entre deux solide (S1) et (S2).

a. Vitesse de glissement

La vitesse de glissement au point I du solide (S1) par rapport à (S2) est la vitesse d'entrainement du point I de (S1) par rapport à (S2), étant la vitesse de I par rapport à (S2) en le supposant fixe par rapport à (S1), elle est notée $\vec{v}_g\left(S_1/S_2\right)$.

$$\vec{v}_g\left(S_1/S_2\right) = \vec{v}\left(I \in S_1/S_2\right) = \vec{v}\left(I_1/S_2\right)$$

Selon la composition de la vitesse :

$$\vec{v}\left(I_1/\Re\right) = \vec{v}\left(I_1/S_2\right) + \vec{v}\left(I \in S_2/\Re\right) \text{ Implique } \vec{v}\left(I_1/S_2\right) = \vec{v}\left(I_1/\Re\right) - \vec{v}\left(I \in S_2/\Re\right)$$

D’autre part, $\vec{v}\left(I \in S_2 / \Re\right)$ représente la vitesse d’entrainement de point I fixe par rapport au référentiel $\Re$ (S1) en le supposant fixe par rapport à (S2), alors.

$$\vec{v}\left(I \in S_2 / \Re\right) = \vec{v}\left(I_2 / \Re\right)$$

Ce qui donne :

$$\vec{v}_g\left(S_1 / S_2\right) = \vec{v}\left(I_1 / \Re\right) - \vec{v}\left(I_2 / \Re\right),$$ quel que soit le référentiel $\Re$.

Egalement on peut écrire: $\vec{v}_g\left(S_1 / S_2\right) = \vec{v}\left(I \in S_1 / \Re\right) - \vec{v}\left(I \in S_2 / \Re\right)$

La vitesse de glissement indépendante du référentiel par rapport auquel les solides (S1) et (S2) sont en mouvement.

Le vecteur de la vitesse de glissement est contenu dans le plan tangent aux solides (S1) et (S2) en I.

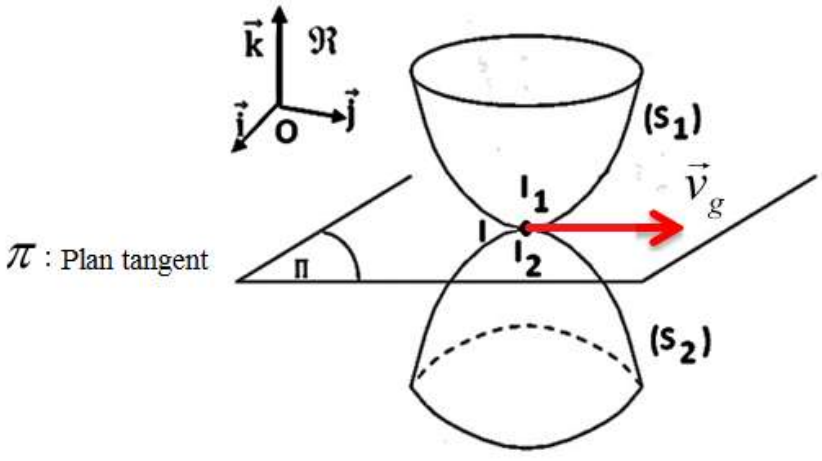

Figure 9 : Plan tangent aux solides et vitesse de glissement

b. Roulement sans glissement

Le solide (S1) roule sans glissement sur le solide (S2) si seulement si la vitesse de glissement de (S1) par rapport à (S2) est nulle $\vec{v}_g\left(S_1/S_2\right)=\vec{0}$.

Dans le cas d'un roulement sans glissement $\vec{v}\left(I/S_2\right)=\vec{v}\left(I/S_1\right)$ et également

$\vec{v}\left(I_1/\Re\right)-\vec{v}\left(I_2/\Re\right)=\vec{0}$

c. Roulement et pivotement

Le vecteur de rotation instantané du solide (S_1) par rapport à (S_2) $\vec{\Omega}\left(S_1/S_2\right)=\vec{\Omega}_n+\vec{\Omega}_t$ peut être décomposé en une composante normale $\vec{\Omega}_n$ et une composante tangentielle $\vec{\Omega}_t$ au plan (Π) qui est tangent aux solides (S_1) et (S_2) **Figure 10**.

$\vec{\Omega}_n$: Vecteur de rotation instantané de pivotement qui correspond à la rotation autour de l'axe $(I,\vec{n})$ normal au plan tangent (Π).

$\vec{\Omega}_t$: Vecteur de rotation instantané de roulement qui correspond à la rotation autour de l'axe $(I,\vec{t})$ tangent au plan (Π).

Quel que soit M un point du solide (S1), sa vitesse par rapport au solide (S2) est :

$$\vec{v}(M/S_2)=\vec{v}\left(I\in S_1/S_2\right)+\vec{\Omega}\left(S_1/S_2\right)\wedge\overrightarrow{IM}$$

Ce qui peut s'écrire encore :

$$\vec{v}(M/S_2) = \underbrace{\vec{v}_g\left(S_1/S_2\right)}_{\text{Vitesse de glissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_n \wedge \overrightarrow{IM}}_{\text{Vitesse de pivotement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_t \wedge \overrightarrow{IM}}_{\text{Vitesse de roulement}}$$

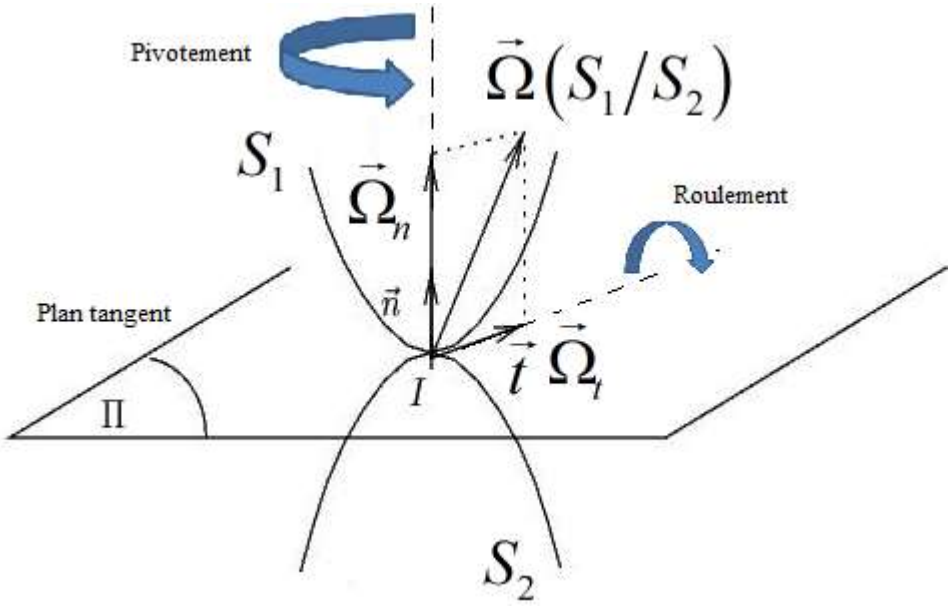

Figure 10 : Rotation instantanée de pivotement et roulement

VI.2. 3. Contact surfacique et linéique.

Le contact entre deux solides se traduit par une contrainte appelée liaison qui limite le mouvement relatif d'un solide par rapport à l'autre, par conséquent le contact entre deux solides diminue le nombre de degrés de liberté. Donc, les liaisons de contact peuvent être classées suivant le nombre de degrés de liberté.

d. Solide à 6 degrés de liberté

Le solide est complétement libre dans l'espace, il n y a pas de liaisons de contact.

Exemple une sphère qui se déplace dans l'espace

e. Solide à 5 degrés de liberté

Par exemple, un solide fait 3 rotations (2roulement+1 pivotement) +2 translations. Seulement une translation est bloquée, (une sphère se roule sur un plan horizontal (π) Figure 11).

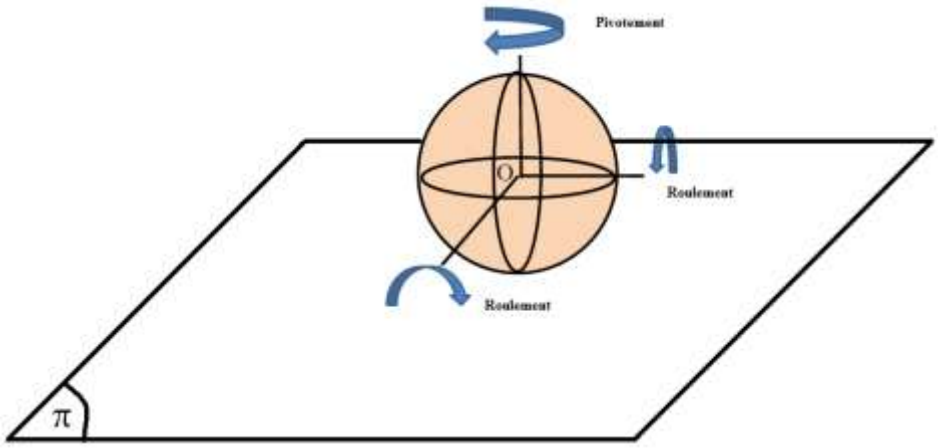

Figure 11: Mouvement d'une sphère sur un plan horizontal

f. Solide à 4 degrés de liberté

Exemple, le cas d'un cylindre se roule sur un plan (π). Le cylindre fait 2 translations et 2 rotations (1roulement+1 pivotement), Figure 12.

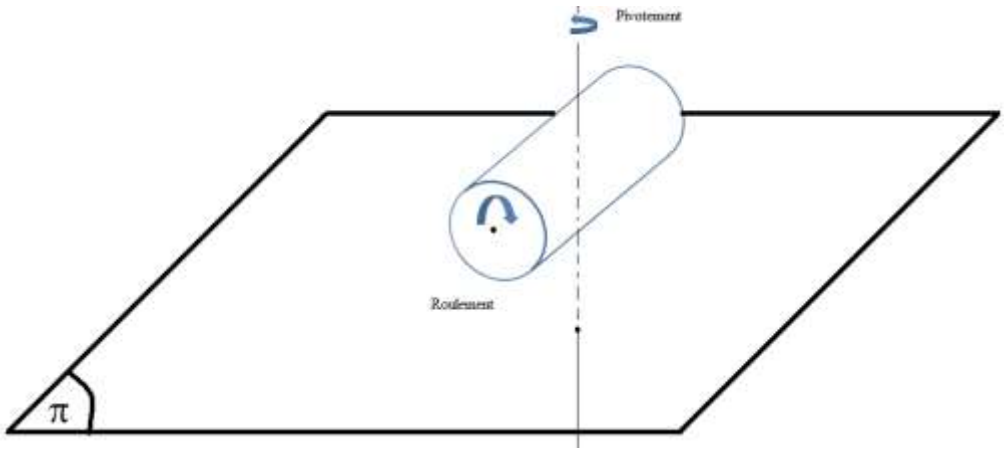

Figure 12: Mouvement d'un cylindre sur un plan horizontal

g. Solide à 3 degrés de liberté

Exemples

- ✓ Liaison plan sur plan (2 translations + 1 pivotement)
- ✓ Liaison rotule ou sphérique

Liaison rotule ou sphérique : deux solides (S1) et (S2) sont liés par une liaison rotule de centre O, si les seuls mouvements possibles de (S1) par rapport à (S2)

sont des rotations autour du point O. La liaison de rotule peut être réalisée à l'aide d'une sphère (S1) enfermée dans une cavité sphérique (S2) dont les rayons approximativement sont égaux Figure 13.

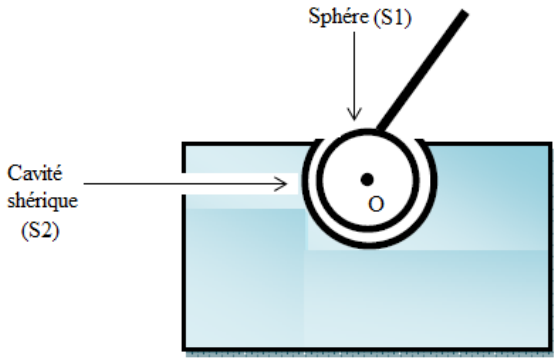

Figure 13: Liaison rotule

Les trois rotations faites par (S1) par rapport à (S2) correspondent aux angles d'Euler ψ, θ et φ . Le vecteur de rotation de (S1) par rapport à (S2) est:

$$\vec{\Omega}\left(S_1/S_2\right) = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k}_o$$

La vitesse du point O de (S_1) par rapport à (S_2) est nulle:

$$\vec{v}\left(O \in S_1/S_2\right) = \vec{0}$$

Le torseur cinématique de la liaison rotule de centre O est un glisseur ses éléments de réduction en point O sont :

$$[v(S_1/S_2]_O = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k}_o \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

La vitesse d'un point M quelconque de (S_1) par rapport à (S_2):

$$\vec{v}\left(M \in S_1/S_2\right) = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\vec{k}_o\right) \wedge \overrightarrow{OM}$$

h. Solide à 2 degrés de liberté

Exemple, la liaison verrou ou pivot glissement

La liaison verrou ou pivot glissement comporte une rotation + une translation. Un solide (S1) est soumis à une liaison verrou d'axe $(A, \vec{k})$ par rapport à un solide (S2), si les seuls mouvements possibles de (S1) par rapport à (S2) sont le mouvement de rotation autour de l'axe $(A, \vec{k})$ et le mouvement de translation rectiligne parallèle à l'axe $(A, \vec{k})$ **figure** 14.

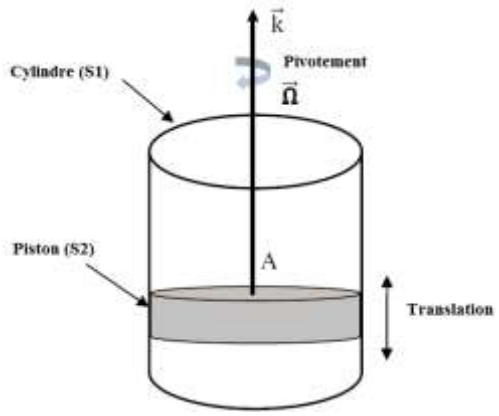

Figure 14 : Liaison verrou ou pivot glissement

Le vecteur de rotation de (S1) par rapport à (S2) est:

$$\vec{\Omega}\left(S_1/S_2\right) = \dot{\varphi}\vec{k}$$

La vitesse du point A (0, 0, z) de (S_1) par rapport à (S_2) n'est pas nulle:

$$\vec{v}\left(A \in S_1/S_2\right) = \dot{z}\vec{k}$$

Le torseur cinématique de la liaison verrou d'axe $(A, \vec{k})$ de (S1) par rapport à un solide (S2), n'est pas un glisseur et ses éléments de réduction en point A dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont:

$$\left[v(S_1/S_2)\right]_A = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\vec{k} \\ \dot{z}\vec{k} \end{pmatrix}$$

La vitesse d'un point M quelconque de (S_1) par rapport à (S_2):

$$\vec{v}\left(M \in S_1/S_2\right) = \dot{z}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}$$

i. Solide à 1 degré de liberté

Dans ce cas, il y a deux cas possibles, (S1) fait un seul mouvement de rotation ou un seul mouvement de translation. Par conséquent, On distingue deux liaisons:

- ✓ Liaison rotoïde (Pivot)
- ✓ Liaison glissière

<u>Liaison rotoïde (Pivot)</u>

Un solide (S1) est soumis à une liaison pivot d'axe $(A, \vec{k})$ par rapport à un solide (S2), si le seul mouvement possible de (S1) par rapport à (S2) est le mouvement de rotation autour de l'axe $(A, \vec{k})$ Figure 15.

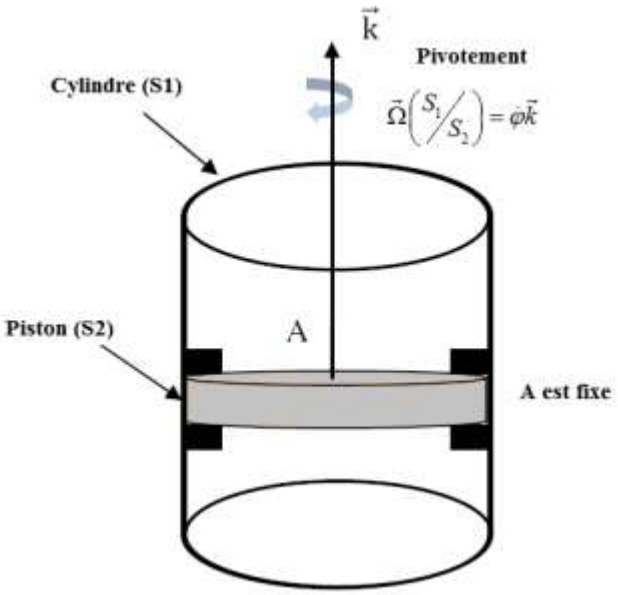

Figure 15 : Liaison rotoïde (Pivot)

Le vecteur de rotation de (S1) par rapport à (S2) est:

$$\vec{\Omega}\left(S_1/S_2\right) = \dot{\varphi}\vec{k}$$

La vitesse du point $A\ (0,\ 0,\ z_A)$ de (S_1) par rapport à (S_2) est nulle:

$$\vec{v}\left(A \in S_1/S_2\right) = \vec{0}$$

Le torseur cinématique de la liaison verrou d'axe $\left(A,\ \vec{k}\right)$ de (S1) par rapport à un solide (S2), est un glisseur et ses éléments de réduction en point A dans la base $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ sont:

$$\left[v(S_1/\Re_2\right]_A = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\vec{k} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

La vitesse d'un point M quelconque de (S_1) par rapport à (S_2):

$$\vec{v}\left(M \in S_1/S_2\right) = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Liaison glissière

Un solide (S1) est soumis à une liaison **glissière** d'axe $\left(A,\ \vec{i}\right)$par rapport à un solide (S2), si le seul mouvement possible de (S1) par rapport à (S2) est le mouvement de translation rectiligne suivant l'axe$\left(A,\ \vec{k}\right)$ Figure 16.

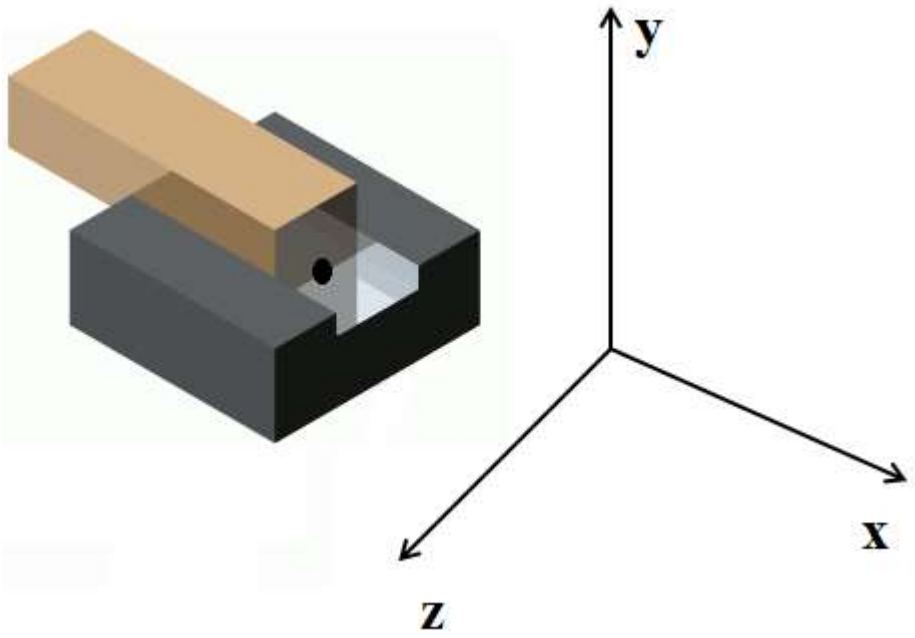

Figure 16 : liaison **glissière** d'axe $\left(A, \vec{i}\right)$

Le vecteur de rotation de (S1) par rapport à (S2) est:

$$\vec{\Omega}\left(S_1/S_2\right) = \vec{0}$$

La vitesse du point $A\ (x,\ 0,\ 0)$ de (S_1) par rapport à (S_2) n'est pas nulle:

$$\vec{v}\left(A \in S_1/S_2\right) = \dot{x}\vec{i}$$

Le torseur cinématique de la liaison glissière d'axe $\left(A, \vec{i}\right)$ de (S1) par rapport à un solide (S2), est un torseur couple et ses éléments de réduction en point A dans la base $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ sont:

$$\left[v(S_1/\Re_2\right]_O = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}\vec{i} \end{pmatrix}$$

La vitesse d'un point M quelconque de (S_1) par rapport à (S_2):

$$\vec{v}\left(M \in S_1/S_2\right) = \dot{x}\vec{i}$$